2.9.17 Využití logaritmů při řešení exponenciálních závislostí a exponenciálních rovnic

Předpoklady: 2916

Logaritmy jsme objevili, protože jsme nedokázali řešit některé úlohy. Zkusíme, zda s jejich pomocí problémy vyřešíme.

Př. 1: Intenzita rentgenových paprsků se sníží na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty.

Pro intenzitu rentgenových paprsků při průchodu olovem platí: $I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$.

Pokud se paprsky zeslabí na desetinu původní intenzity, platí: $I = \frac{1}{10} I_0$.

Dosadíme: $I_0 \frac{1}{10} = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$.

$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$ Tady jsme skončili, neuměli jsme shodit *x* z exponentu.

Teď známe vzorec $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$. Stačí, aby pravá strana byla logaritmus, a neznámou dostaneme dolů z exponentu.
Jak zajistit, aby na pravé straně rovnice byl také logaritmus?
Rovnice - dvě čísla, která se rovnají $\Rightarrow$ pokud čísla nahradíme jejich logaritmy, musí se rovnat také (oba logaritmy děláme ze stejného čísla, logaritmus je funkce a musí tak ze stejných *x* vyrobit stejná *y*) - **rovnici jsme zlogaritmovali.**

$0,1 = (0,5)^{\frac{x}{13,5}}$ - čísla, která se rovnají.

$\log 0,1 = \log\left(0,5^{\frac{x}{13,5}}\right)$ - jejich logaritmy se rovnají také.

$\log 0,1 = \frac{x}{13,5}\log 0,5 \quad / \cdot \frac{13,5}{\log 0,5}$

$x = \frac{13,5 \cdot \log 0,1}{\log 0,5}\,\text{cm} \doteq 44,8\,\text{mm}$

Rentgenové paprsky zeslabí na jednu desetinu olověná deska o tloušťce 44,8 mm.

Při řešení předchozího příkladu jsme použili zlogaritmování rovnice. Rovnici ve tvaru $výraz1 = výraz2$ **jsme nahradili rovnicí** $\log_a(výraz1) = \log_a(výraz2)$ **(rovnost čísel jsme převedli na rovnost jejich logaritmů). Tato úprava je pro hodnoty výrazu povolené při**

dosazení do logaritmů ekvivalentní a používá se zejména v případech, kdy potřebujeme neznámou „sundat" z exponentu.

Zkusíme příklady o spoření. V žádném z příkladů jsme nezjišťovali dobu, po kterou musíme spořit.

Př. 2: Do banky jsi uložil na úrok 3% částku 500000 Kč. Za kolik let budeš mít k dispozici 750 000 Kč?

$$n = n_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

$$750000 = 500000\left(1+\frac{3}{100}\right)^t$$

$$75 = 50\cdot 1,03^t$$

$\log 75 = \log\left(50\cdot 1,03^t\right)$ - logaritmujeme celou pravou stranu, je to jediné číslo.

$\log 75 = \log 50 + \log 1,03^t$ - nemůžeme strčit *t* před celý logaritmus, musíme logaritmus nejdříve rozdělit, protože 50 není umocněno na *t*.

$$\log 75 - \log 50 = t\cdot \log 1,03$$

$$t = \frac{\log 75 - \log 50}{\log 1,03} = 13,7 = 14 \text{ let}$$

750 000 našetříme za uvedených podmínek za 14 let.

Pedagogická poznámka: Část studentů řeší příklad obratněji:

$$750000 = 500000\left(1+\frac{3}{100}\right)^t$$

$$1,5 = 1,03^t$$

Mají pak samozřejmě jednodušší logaritmování rovnice. Přesto si po vypočtení ukazujeme řešení uvedené v učebnici, protože všichni, kteří rovnici zcela nezkrátí a počítají sami, mají výsledek špatně.

Ještě zkusíme spočítat, jaký by musel být úrok, abychom našetřili za danou dobu dané množství peněz.

Př. 3: Do banky chceš uložit částku 500000 Kč. Jaký musí banka poskytnout úrok, abys za 10 let našetřil 750 000 Kč?

$$n = n_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

$$750000 = 500000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$75 = 50\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$\frac{75}{50}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$1,5=\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$ - odmocníme rovnici.

$$\sqrt[10]{1,5}=\sqrt[10]{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}}$$

$$\sqrt[10]{1,5}=1+\frac{p}{100}$$

$$\sqrt[10]{1,5}-1=\frac{p}{100}$$

$$p=100\left(\sqrt[10]{1,5}-1\right)=4,14$$

Banka by musela nabídnout úrok více než 4,14 procenta.

Pedagogická poznámka: K řešení posledního příkladu nejsou logaritmy samozřejmě potřeba. Je zde pouze jako odpověď na poslední zajímavou otázku ohledně složeného úrokování.

Pedagogická poznámka: Pokud budete počítat následující příklad, zůstane málo času na počítání rovnic v závěru hodiny.

Př. 4: Radiouhlíková metoda určování stáří organických materiálů využívá rozpad radioaktivního uhlíku ${}^{14}_{6}C$. Radioaktivní uhlík ${}^{14}_{6}C$ má poločas rozpadu 5730 let, protože však neustále vzniká kvůli dopadu kosmického záření, jeho obsah v atmosféře se nemění. Protože suchozemské živé organismy čerpají uhlík z atmosféry, je za jejich života obsah radioaktivního uhlíku ${}^{14}_{6}C$ v jejich tělech stejný jako v atmosféře. Jakmile však zemřou, přestane se radioaktivní uhlík v jejich tělech doplňovat a kvůli rozpadu jeho množství exponenciálně klesá. Z podílu radioaktivního uhlíku tak můžeme zjistit, jak dlouhá doba uplynula od okamžiku, kdy organismus uhynul. Při vykopávkách byla nalezena kostra, která obsahovala 78,6% radioaktivního uhlíku živého organismu. Urči, které významné historické osobnosti mohla kostra náležet.

Obsah uhlíku po:

0 let	…	1
5370 let	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$
$2\cdot 5370$ let	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$
x let	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$

Dosadíme: $0,786=0,5^{\frac{x}{5730}}$

$$\log 0,786=\log 0,5^{\frac{x}{5730}}$$

$\log 0,786 = \frac{x}{5730} \log 0,5$

$x = 5730 \frac{\log 0,786}{\log 0,5} = 1990 \text{ let}$

Člověk, kterému patřila nalezená kostra, zemřel přibližně před 1990 lety, tedy okolo roku 20 našeho letopočtu.

Dodatek: Možní majitelé kostry (rok úmrtí 20 ± 15 let):
Ježíš Kristus (30-33)
Gaius Octavianus Augustus (14) – první římský císař
Publius Varus (9) – římský vojevůdce poražený v bitvě v Teutoburském lese, kde Germáni zastavili postup Římanů na sever.
Marcus Vitruvius (10) – architekt, autor jediné dochované antické příručky o architektuře
Titus Livius (17) – římský historik
Publius Ovidius Naso (17) – římský básník
Gaius Julius Germanikus (19) – římský vojevůdce, vítěz nad Germány
Strabón (23) – řecký zeměpisec
Wang Mang (23) – jediný panovník čínské dynastie Sin, svržen povstáním Rudých obočí

Přesuneme se k rovnicím.
Když se učitel netrefí:

Př. 5: Vyřeš rovnici $2^x + 2^{x+1} = 9$.

$2^x + 2^{x+1} = 9$

$2^x + 2 \cdot 2^x = 9$

Substituce: $y = 2^x$

$y + 2y = 9$

$3y = 9$

$y = 3$

Návrat k původní proměnné:

$y = 2^x = 3$

$2^x = 3$ Ještě před týdnem bychom byli namydlení, na co máme umocnit 2, aby vyšlo 3?
To je otázka po logaritmu: přece na $\log_2 3 \Rightarrow x = \log_2 3$.

$K = \{\log_2 3\}$

Radši zkusíme zkoušku:

$L = 2^{\log_2 3} + 2^{\log_2 3 + 1} = 3 + 2 \cdot 2^{\log_2 3} = 3 + 2 \cdot 3 = 9$

$P = 9$

$L = P$

Pedagogická poznámka: Po vyřešení příkladu se určitě někteří studenti budou zlobit, že jako správný výsledek není uvedeno číslo 1,584962501, které jim ukazuje kalkulačka a se kterým na kalkulačce vyjde zkouška („$\log_2 3$ přece není žádné číslo“). Je dobré jim pomocí matematického programu, který počítá na větší počet platných číslic ukázat, že jejich desetinné vyjádření rozhodně není přesná hodnota, se kterou zkouška vyjde (při výpočtu na 30 míst vyjde výraz na levé straně 9.00000000173951825994529542567).

Př. 6: Vyřeš rovnici $3^x + 2\cdot 3^{1-x} = 5$.

$3^x + 2\cdot 3^{1-x} = 5$

Problém: Potřebovali bychom substituci $3^x = y$, musíme upravit výraz $2\cdot 3^{1-x}$, tak abychom získali 3^x.

$3^x + 2\cdot 3^{1-x} = 5$

$3^x + 2\cdot 3\cdot 3^{-x} = 5$

$3^x + \frac{6}{3^x} = 5$

Substituce: $y = 3^x$

$y + \frac{6}{y} = 5 \quad /\cdot y$ - můžeme násobit, $y = 3^x \Rightarrow y > 0$

$y^2 + 6 = 5y$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$(y-3)(y-2) = 0$

$y_1 = 3$ $y_2 = 2$

Návrat k původní proměnné:

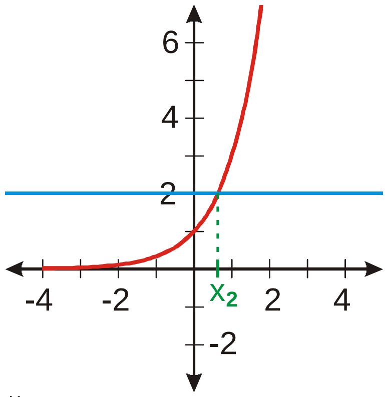
$y_1 = 3^{x_1} = 3$

$3^{x_1} = 3^1$

$x_1 = 1$

$y_2 = 3^{x_2} = 2$

$3^{x_2} = 2$ Neumíme napsat 2 jako mocninu trojky (tři na něco), to ale neznamená, že rovnice $3^{x_2} = 2$ nemá řešení. Nakreslíme grafy funkcí $y = 3^x$ a funkce $y = 2$.



Číslo, které by bylo řešením, existuje, platí pro ně $0 < x_2 < 1$, je to číslo, na které musíme umocnit trojku, aby vyšla dvojka. Teď už hledané číslo známe, hned z definice víme, že $x_2 = \log_3 2$ (číslo, na které musíme umocnit trojku, aby vyšla dvojka)

Můžeme postupovat i jinak:

$3^x = 2$ - zlogaritmujeme při základu 3 (základ si můžeme vybrat, tohle bude nejjednodušší)

$\log_3 3^x = \log_3 2$

$x \log_3 3 = \log_3 2$ ($\log_3 3 = 1$, už je jasné, proč jsme vybrali trojku)

$x = \log_3 2$ Problém je vyřešen.

$K = \{\log_3 2; 1\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $7^x - 6 + 8 \cdot 7^{-x} = 0$.

$7^x - 6 + 8 \cdot 7^{-x} = 0 \quad / \cdot 7^x$

$7^x \cdot 7^x - 6 \cdot 7^x + 8 = 0$

Substituce: $y = 7^x$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y-4)(y-2) = 0$

$y_1 = 4$ $\qquad$ $y_2 = 2$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 7^{x_1} = 4$

$7^{x_1} = 4$

$\log_7 7^{x_1} = \log_7 4$

$x_1 \cdot \log_7 7 = \log_7 4$

$x_1 = \log_7 4$

$y_2 = 7^{x_2} = 2$

$7^{x_2} = 2$ Hledáme číslo, na které musíme umocnit sedmičku, aby vyšla dvojka,
Teď už hledané číslo známe, hned z definice víme, že $x_2 = \log_7 2$.

$K = \{\log_7 2; \log_7 4\}$

Př. 8: Petáková:
strana 34/cvičení 6 c) d)
strana 34/cvičení 7 c) d)

Shrnutí: Logaritmováním dostaneme neznámou z exponentu.